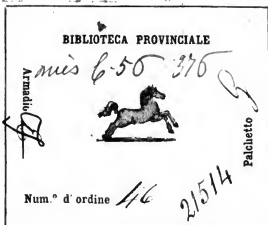


MARTONE
CISSOIDE E CONCOIDE





DELLA
CISSOIDE
E DELLA
CONCOIDE

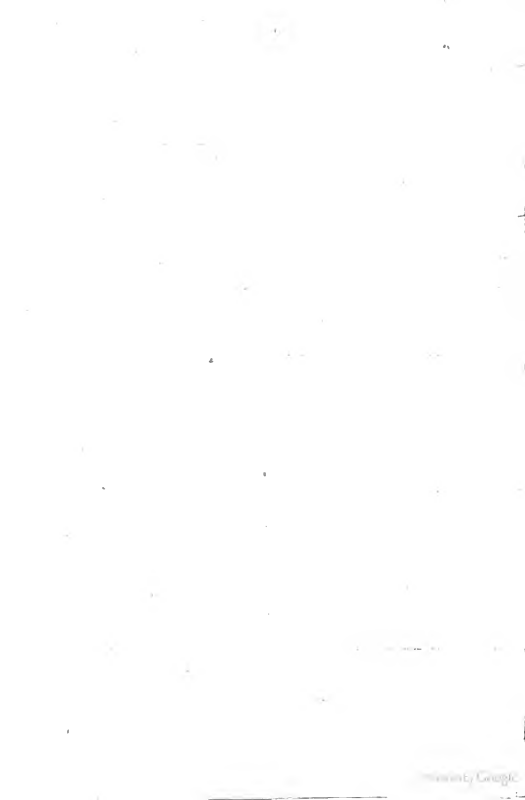
PER

MICHELE MARTONE

Memoria data alle stampe con incoraggiamento
della Provincia di Napoli



IN NAPOLI
PRESSO DOMENICO MORANO
1869



DELLA CISSOIDE



La Cissoide, o la curva di Diocle, è dovuta a questo geometra greco, che visse nel VI secolo della nostr' Era. Egli si proponeva di risolvere per mezzo di essa il celebre problema di quel tempo della costruzione di due medie proporzionali fra due rette date.

Se da A (fig. 1), estremità del diametro AB del cerchio generatore AQB, si conducano un numero infinito di obbligue Aa, Aa', Aa'', etc. su BC, tangente in B al cerchio proposto, e si prendano su queste obbligue, incominciando da a, a', a'' etc., le distanze

$$ac' = Ac, a'v'' = Ab, a''v''' = Ab', \text{ etc.};$$

la curva che passerà per i punti c', v'' v''', etc. è chiamata Cissoide.

Fa d'uopo osservare, che questa curva avrà due rami perfettamente simili, situati l'uno a destra e l'altro a sinistra di AB; e che essi prenderanno il segno $\pm$ secondo la loro situazione. Inoltre i due rami saranno infiniti, perchè si potranno tirare un numero infinito di obbligue, e si avrà un numero infinito di punti, pei quali passerà la curva. Imperciocchè non vi sarà più alcun punto ad essa appartenente, se

non quando l'obliqua Aa'' diventerà tangente nel punto A al cerchio generatore, ed incontrerà BC all'infinito.

In vano Diocle tentò di descrivere questa curva per moto continuo, ma Newton la descrisse, facendo muovere una squadra ABC (fig. 2) su due rette AE ed EF perpendicolari tra loro, in modo che il lato AB scorresse pel punto A, mentre il punto C scorresse su di EF. La curva generata da O medio di BC è la Cissoide.

Per avere la sua equazione si tiri cb (fig. 1), Ac , e Bc; si ponga

$$AB=a, AS=x, Sv''=y, Sc=q,$$

e si avrà

$$\frac{y}{x} = \frac{x}{q}$$

o

$$x^2=qy;$$

ma siccome

$$q^2=a^2-x^2,$$

risulterà

$$y^2 = \frac{x^3}{a-x} \quad x$$

per l'equazione della Cissoide in coordinate rettangolari : ed è chiaro che l'equazione in coordinate polari sarà

$$y=4\text{sen. } \omega \text{ tang. } \omega,$$

in cui ω indica l'angolo variabile BAa.

Se si ponesse nell'equazione della curva in coordinate rettangolari $x = a$, si avrà

$$y = \pm \sqrt{\frac{a^3}{0}} = \pm \infty$$

Dal che risulta, come antecedentemente si è veduto, che la curva incontrerà l'asintoto a distanza infinita.

Ponendo

$$Q = (a - x), \text{ ed } A = (3ax^2 - 2x^3);$$

l'equazione del raggio osculatore indicato da ρ sarà

$$\rho = \frac{6Qx^2 + 2A^2}{6x^2(a-1) + 2x^3(2A-1) - 3ax^3};$$

e quella del cerchio osculatore è

$$1 + \frac{A^2}{2Q^2x^2} - \left(\rho - \sqrt{\frac{x^3}{Q}} \right) \left[\frac{2x^2(Q^2x + A) - A^2}{2\sqrt{\frac{x^3}{Q}}} \right] = 0;$$

e sarà

$$\rho - \sqrt{\frac{x^3}{Q}} = \frac{2QA^2}{2x(Q^2x + QA) - A^2} \cdot \sqrt{\frac{x^3}{Q}}$$

$$\alpha + x = - \frac{A^2}{2x(Q^2x + QA) - QA^2} \cdot \sqrt{\frac{x^3}{Q}}$$

Ora, essendo noti questi valori, sarà facile ricavare l'equazione della sviluppata.

Si risolverebbe il problema delle due medie proporzionali per mezzo della Cissoide, se questa potesse costruirsi geometricamente; giacchè prendendosi OB ed Oo (fig. 4.) per le due rette proposte, e pei punti o e B conducendosi Bc' , e tirandosi Ac' , si avrà $c'l = lc$; e la retta Ol sarà una delle medie proporzionali cercate; e Pappo Alessandrino antece-

dentemente avea ridotto la soluzione del problema a trovare il punto l .

È importante osservare, che lo spazio infinito compreso tra l'asintoto e la curva è equivalente a tre volte il cerchio generatore.

Imperciocchè, se in

$$\int y \, dx$$

si ponga il valore di y , tratto dalla equazione della curva, si ha

$$\int \frac{x^{\frac{3}{2}} \, dx}{(a-x)^{\frac{1}{2}}}$$

e sarà

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{x^{\frac{3}{2}} \, dx}{(ax - x^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{3}{8} \pi a^2$$

e l'intero spazio sarà uguale a $\frac{3}{4} \pi a^2$, ovvero a tre volte

il cerchio generatore, di cui il raggio è $\frac{1}{2} a$.

PROPOSIZIONE PRIMA

Il solido generato dallo spazio infinito cissoideale $K S s Q$ (fig. 8), che giri intorno a $QO = S s$, è doppio del solido generato dalla semi cicloide $Q O s$, che giri intorno di $O Q$.

Imperciocchè, ponendo

$$\begin{aligned} ec &= t, \text{ circonf. } Qd = u \\ \text{circonf. } ss' &= c, sQ = 2a, sd = x, Dd = y \end{aligned}$$

tu sarà uguale alla superficie cilindrica descritta da ec ; e ponendo $Cc = -dx$ si ha

$$-t u dx$$

per la differenziale del solido generato dalla rivoluzione dello spazio Qec intorno QO ; ma per proprietà della Cissoide si ha

$$t = \frac{(2a-x)y}{x} = \sqrt{\frac{(2a-x)^3}{x}};$$

e siccome

$$\frac{u}{c} = \frac{2a-x}{2a};$$

sarà

$$u = \frac{c(2a-x)}{2a};$$

e sostituendo questi valori di t e di u in $-t u dx$ si ottiene

$$- \frac{c}{2a} \sqrt{\frac{(2a-x)^3}{x}} dx;$$

ma il solido Oss' è espresso da

$$- \frac{c}{4a} \sqrt{\frac{(2a-x)^3}{x}} dx$$

dunque etc. etc.

PROPOSIZIONE SECONDA

Il volume generato dallo spazio cissoïdale infinito OLBA (fig. 4), che giri intorno al suo asintoto AB, è uguale al volume generato dal semicerchio generatore ASO, che giri intorno ad una retta innalzata da O perpendicolarmente ad AV.

Imperciocchè, ponendosi per brevità

$OA = a$, circ. $OSA = 2c$, $OP'' = x$, $P''p'' = dx$, superficie cilind. $P'V' = y$, super. cilind. $PP''' = z$; la differenziale del solido generato da $OP''P'$ intorno di AB è espressa da $y dx$, e quella del solido generato da $OP''P$ intorno di OQ è espressa da $z dx$; ma siccome

$$\frac{y}{z} = \frac{P'P'' \times P''A}{P'P'' \times P''O},$$

e per proprietà della curva

$$P'P'' \times P''A = P'P'' \times P''O;$$

così

$$y = z$$

e sarà

$$y dx = z dx$$

dunque etc. etc.

Corollario. Il solido generato dal semicerchio generatore è uguale ad $\frac{1}{2}acc$; dunque questa è benanche l'espressione del volume generato dallo spazio cissoïdale infinito OLBA.

PROPOSIZIONE TERZA

In un triangolo rettangolo QHC (fig. 5), se si tirino tante rette M'B', m'b', S s etc. parallele ad HC, e si faccia

$$\frac{QW'}{A'B'} = \frac{CW'}{B'M'}; \quad \frac{Qb'}{a'b'} = \frac{Cb'}{b'm'} \text{ etc.}$$

il volume generato dalla rivoluzione del triangolo generatore QHC intorno alla direttrice QV, sarà sempre uguale al volume generato dalla rivoluzione, intorno l'asintoto CH, dello spazio cissoidale infinito QS'H'C, compreso tra l'asintoto stesso e la cissoide, che passa pe' punti QA'a'SS' etc.

In effetti, tirando due rette infinitamente vicine M'B' e m'b', e facendo girare il triangolo QHC intorno a VQ perpendicolare su QC, le rette M'B' ed m'b' descriveranno nel girare delle superficie cilindriche, che saranno degli elementi della superficie del solido generato da QHC intorno QV, e le A'B' e a'b' descriveranno nel girare delle superficie cilindriche, che saranno degli elementi della superficie del solido generato da QS'H'C intorno HC; e ponendosi

$$QC = a, CH = b, B'b' = dx$$

$$\text{super.}^a \text{ cilindr.}^a A'B = y, \text{ super.}^a \text{ cilindr.}^a M'V = z$$

$$\text{circonf.}^a DQ = c$$

y dx sarà la differenziale del solido formato dalla rivoluzione dello spazio QM'B' intorno di QV; z dx sarà la differenziale del solido formato dalla rivoluzione dello spazio QA'B' intorno CH; ma siccome

$$\frac{y}{z} = \frac{A'B \times B'C}{A'b' \times B'Q}$$

ed

$$A' B' \times B' C = M' B' \times B' Q$$

così

$$y = z;$$

e quindi

$$y \, dx = z \, dx$$

dunque etc. etc.

Corollario. Il solido generato da QHC è uguale ad $\frac{4}{3} abc$;
dunque questa è benanche l'espressione del volume generato dallo spazio infinito cissoidale Q S' H' C.

DELLA CONCOIDE

Nicomede, per risolvere i due problemi della duplicazione del cubo, e della trisezione dell'angolo, inventò una curva chiamata Concoide.

Per descriverla si meni la retta AB (fig. 5) perpendicolare a DC , e dal punto A si tirino un numero infinito di oblique AO' , AO'' etc. etc. per rispetto alla perpendicolare AB , e si prendano su queste oblique le distanze a piacere

$$e'o' = e''o'' = Bo, \text{ etc.},$$

la curva che passa pe' punti o , o' , o'' è chiamata Concoide, in cui la retta DC è l'asintoto.

Essa ha due rami perfettamente simili, chiamati l'uno concoide anteriore e l'altro posteriore; imperciocchè, se la distanza Bo si prenda dalla parte opposta sulle diverse oblique, si avrà l'altro ramo; ed entrambi i rami avranno il segno $+$ o $-$ secondo la loro situazione per rispetto all'asintoto.

Si descrive questa curva d' un moto continuo, facendo muovere (fig. 5) la riga AO in modo, che essa scorra pel pun-

to A , mentre il punto E scorra su DC ; e così i punti O e Q descriveranno i due rami della Concoide.

Per aversi la sua equazione si consideri AB per asse delle ascisse, e pongasi per brevità

$$AB = a, o''S' = y, Bo = o' o' = b, BS' = x - a$$

I triangoli A o'' S' danno

$$A o'' = \sqrt{x^2 + y^2}$$

e quindi

$$\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{b^2} = \frac{x}{x - a}$$

o pure

$$\frac{x^2 + y^2}{b^2} = \frac{x^2}{(x - a)^2} ;$$

e sarà

$$\frac{y^2}{x^2} = \frac{b^2 - (x - a)^2}{(x - a)^2} ,$$

ed infine

$$y^2 = \frac{x^2 (b^2 - (x - a)^2)}{(x - a)^2} ,$$

o per più semplicità

$$y = \pm x \sqrt{\frac{b^2}{(a - x)^2} - 1} ;$$

e questa è l'equazione che appartiene ai due rami della curva, prendendo o l'uno, o l'altro segno.

Se si voglia l'equazione della Concoide in coordinate polari bisognerà porre (fig. 6)

$$PM = y, QM = a, PO = b, \angle PMQ = \varphi$$

e si avrà

$$PQ = \frac{b}{\cos \varphi};$$

e quindi

$$y = \frac{b}{\cos \varphi} \pm a$$

I due rami della Concoide sono infiniti, imperciocchè se si pone $(x - a) = 0$ nella sua equazione in coordinate rettangolari, si avrà

$$y = \pm \sqrt{\frac{x^2 b^2}{0}} = \pm \infty$$

Lo spazio asintotico, del quale la metà è espresso da

$$\int \frac{ab d\varphi}{\cos \varphi} = ab l. \tan. (45^\circ + \frac{1}{2} \varphi)$$

sarà

$$2 ab l. \tan. (45^\circ + \frac{1}{2} \varphi)$$

Il problema della duplicazione del cubo, col mezzo delle due medie proporzionali, fu risoluto da Nicomede nel seguente modo.

Siano (fig. 9) AB ed AD due rette date, situate ad angolo retto. Si completi il rettangolo ABCD; da G medio di AD s'innalzi la perpendicolare GI = $\frac{1}{2}$ AB; si prolunghi AG d'una

lunghezza $AH = AG$, e si congiunga H ed I ; da D si meni la parallela indefinita DL ad IH , e da I s'abbassi la perpendicolare IQ su DL , e si prolunghi d'una lunghezza $QR = IG$; da I come polo, e la retta DL come asintoto, si descriva la Concoide RE . Congiungendosi I ed E , la retta IE sarà uguale ad IG , e le due rette FB e DE saranno le medie richieste, perchè a causa della similitudine dei triangoli FBC , e DCE sarà

$$BC : FB :: FB : DE :: DE : CD$$

Se siano a e b le due rette date ed x ed y le medie proporzionali cercate, si avrà

$$a : x :: x : y :: y : b$$

perciò

$$x^2 = ay$$

$$y^2 = bx,$$

e sarà

$$x^3 = a^2 b,$$

e ponendosi

$$b = 2a$$

si otterrà

$$x^3 = 2a^3$$

In quanto al secondo problema, la soluzione ne fu data dallo stesso Geometra.

Sia dato l'angolo MEL (fig. 7) da dividersi in tre parti uguali. Si completi il rettangolo $LENM$, e si prolunghi EL d'una lunghezza $BL = 2ME$. Si prolunghi NM fino all'incontro della Concoide descritta da E come polo, e DS paral-

lola ad $ML = BD$ come asintoto, e da A si tiri EA ; e sarà
 $IEL = \frac{4}{3} MEL$.

Molti hanno descritto la Concoide per moto continuo analogo a quello dato poco prima, facendo muovere la riga PM (fig. 6) intorno di P, in modo che intersichi continuamente il cerchio descritto con raggio $QM = a$, che si muova benanche, facendo scorrere il suo centro Q su QB ; il punto $\pm M$ descriverà la Concoide ulteriore o la citeriore.

Con quest'ultimo modo si possono descrivere molte Concoide differenti, imperciocchè in luogo della circonferenza mobile si può prendere una curva qualunque; e se la curva sia una parabola, di cui l'equazione è

$$y^2 = px \\ y^3 + by^2 - apy - apb = pxy$$

sarà l'equazione della Concoide parabolica; curva impiegata da Descartes per risolvere l'equazione generale di sesto grado. Nei commentarii alla geometria di lui, Scooten ha dato il modo di menare una tangente ad un punto qualunque della Concoide semplice.

In effetti, se si volesse condurre la tangente in un punto O (fig. 7), si congiunga questo punto col polo E, dal punto S s'abbassi la perpendicolare SR su di OC ; dal punto R si abbassi la perpendicolare RT su di OE, e si congiungano il punto C ed il punto T ; dal punto O si tiri una parallela a TC, la OV sarà la tangente richiesta in O.

Per approssimazione il volume generato dallo spazio concoideale o''RBo (fig. 5) potrebbe essere espresso da

$$V = \frac{2}{3} \pi a^2 x.$$

Se si cercasse il raggio ed il cerchio osculatore della

curva, siccome dalla sua equazione si ricava, ponendo $(a - x) = Q$, che

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{Q^3 + (Q^3 + Q^2 - b^2)x + Qb^2}{\sqrt{b^2 - Q^2}};$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{Q^3 + 4Q^2(b^2 - 1) - Q^3b^2 - 5Q^2b^2x}{2b^2 - 2Q^2};$$

così sostituiti questi valori nell'equazioni generali, si otterranno le richieste equazioni; e sarà benanche facile ricavare da essi l'equazione della sviluppata. L'equazione poi

$$Q^3 + 4Q^2(b^2 - 1) - Q^3b^2 - 5b^2x = 0$$

risolta per rispetto ad x darà il valore del punto d'inflessione.

5BN679905

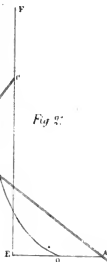


Fig. 2.

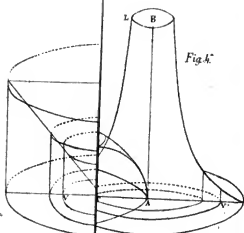


Fig. 4.

Fig. 6



Fig. 8.

